

## Yeni bir doyumlu eyleyiciye sahip gecikmeye bali dayanikli H denetleyici ile aktif titreim kontrolü

Yazici, Hakan; Guclu, Rahmi; Kucukdemiral, Ibrahim B.

*Published in:*

16. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu

*Publication date:*

2013

*Document Version*

Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link to publication in ResearchOnline](#)

*Citation for published version (Harvard):*

Yazici, H, Guclu, R & Kucukdemiral, IB 2013, Yeni bir doyumlu eyleyiciye sahip gecikmeye bali dayanikli H denetleyici ile aktif titreim kontrolü. in *16. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu*. pp. 192-201, 16. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu, Erzurum, Turkey, 12/09/13.

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please view our takedown policy at <https://edshare.gcu.ac.uk/id/eprint/5179> for details of how to contact us.

## YENİ BİR DOYUMLU EYLEYİCİYE SAHİP GECİKMeye BAĞLI DAYANIKLI $H_\infty$ DENETLEYİCİ İLE AKTİF TİTREŞİM KONTROLÜ

Hakan YAZICI\*, Rahmi GÜÇLÜ\*\*, İbrahim B. KÜÇÜKDEMİRAL\*\*\*

(\*,\*\*) Yıldız Teknik Üniversitesi, Makine Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, İSTANBUL

(\*\*\*)Yıldız Teknik Üniversitesi, Elektrik Elektronik Fakültesi, Kontrol ve Otomasyon  
Mühendisliği Bölümü, İSTANBUL

[hyazici@yildiz.edu.tr](mailto:hyazici@yildiz.edu.tr), [guclu@yildiz.edu.tr](mailto:guclu@yildiz.edu.tr), [beklan@yildiz.edu.tr](mailto:beklan@yildiz.edu.tr)

### ÖZET

Bu çalışmada, enerjisi sınırlı bozucuların durum geri-beslemeli denetim mantığı ile bastırılması için, yeni bir doyumlu eyleyiciye sahip gecikmeye bağlı dayanıklı  $H_\infty$  denetleyici metodu geliştirilmiştir. İlk olarak, nominal zamanla değişen eyleyici gecikmeli bir sistemin küresel asimptotik kararlılık koşulları, uygun Lyapunov-Krasovskii aday fonksiyonelinin seçimiyle yeterli kararlılık kısıtlarının Lineer Matris Eşitsizlikleri (LME) biçiminde geliştirildiği bir Sınırlı Reel Yardımcı Teoremi (SRYT) ile elde edilmiştir. SRYT'nin genişletilmesiyle, yeterli gecikmeye bağlı kararlılık koşulları  $H_\infty$  sentezini kararlı kılmak amacıyla matris eşitsizliği biçiminde geliştirilmiştir. Doyumlu eyleyiciye sahip normu sınırlı parametre belirsizliği içeren eyleyici gecikmeli bir sistem için, SRYT ve  $H_\infty$  kararlı kılma koşullarının genişletilmesiyle yeni bir  $H_\infty$  denetleyici tasarımı gerçekleştirilmiştir. Tasarım sonucu ortaya çıkan, lineer olmayan matris eşitsizliği problemi konik tamamlayıcı algoritmasının kullanılması ile çözülmüştür. Geliştirilen denetim metodunun etkinliği, sismik zorlanma altındaki normu sınırlı belirsizlik içeren yapısal bir sistemin titreşimlerinin azaltılması problemi ile test edilmiştir. Sismik zorlanma altındaki yapısal sistemin zaman ve frekans alanındaki cevapları, yapısal titreşimlerin azaltılmasında önerilen denetleyicinin yüksek sönüm performansına sahip olduğunu ve eyleyici doyumu kısıtlarında denetim sisteminin maksimum gecikme zamanı ve parametre belirsizliği sınırlarındaki kararlılığının garanti altında olduğunu göstermiştir.

**Anahtar Kelimeler:**  $H_\infty$  kontrol, parametre belirsizliği, eyleyici gecikmesi, eyleyici doyumu, titreşim.

### ACTIVE VIBRATION CONTROL BY THE USE OF A NEW DELAY-DEPENDENT ROBUST $H_\infty$ CONTROLLER HAVING ACTUATOR SATURATION

### ABSTRACT

In this study, a new delay-dependent robust  $H_\infty$  controller having actuator saturation method is developed to attenuate the disturbance signals acting on system have bounded energy. Based on the selection of Lyapunov-Krasovskii functional, first a Bounded Real Lemma (BRL) is obtained in terms of linear matrix inequalities (LMIs) such that the nominal, time-delay system is guaranteed to be globally asymptotically stable with minimum allowable disturbance attenuation level. Extending BRL, sufficient delay-dependent criteria are developed for a stabilizing  $H_\infty$  controller synthesis involving a matrix inequality. A new  $H_\infty$  controller is designed for a system having actuator saturation, norm-bounded uncertainties and actuator delay by the use of extended BRL and  $H_\infty$  stabilization criteria. This sufficient condition for designing such controller is given by delay-dependent bilinear matrix inequalities and a cone complementary algorithm is also utilized to solve the non-convex optimization problem. To show the effectiveness of the approach, performance of the proposed controller is examined in disturbance attenuation problem of seismic excitations, in a

structural system having norm bounded uncertainties. The time history and frequency responses of structural system under seismic excitations show that the design controller has high damping performance and guarantees stability at maximum actuator delay and parameter uncertainty bounds under actuator saturation constraints.

**Keywords:**  $H_\infty$  control, parametric uncertainty, actuator delay, actuator saturation, vibration.

## 1. GİRİŞ

Son dönemlerde, geri-beslemeli denetim sistemlerinde düşük performans ve kararlılık problemlerine neden olan eyleyici gecikmesi, eyleyici doyumu ve parametre belirsizliği gibi problemlerin çözümüne yönelik yeni yöntem ve tasarımlar gerçekleştirilmiştir. Bu alanda, enerjisi sınırlı bozucu etkiler altındaki eyleyici gecikmeli doyumlu eyleyiciye sahip belirsizlik içeren sistemler için, daha az tutucu denetleyici arayışı üzerine yapılan akademik çalışmalar hız kazanmıştır [1].

Fiziksel ve dinamik sistemlerin çoğu, kaçınılmaz olarak zaman gecikmesine maruz kalırlar. Genellikle uzun iletim hatları, veri akışında yaşanan gecikmeler ve veri işleme hızının sonlu olmasından kaynaklanan zaman gecikmesi olayı, sistemlerde performans kaybına, hatta kararsız davranışlara yol açabilir. Bu durum, özellikle geri-beslemeli denetim sistemlerinde pek çok uygulamada önemli bir problem olarak ortaya çıkmaktadır [2].

Denetleyici tasarımlarında dikkate alınması gereken diğer bir önemli olay ise, sistem eyleyicilerinin doyumlu olmasıdır. Eyleyici içeren geri-beslemeli denetim uygulamalarında eyleyiciler üzerinde çok sıkı değişim sınırlamaları bulunmaktadır. Bununla birlikte eyleyici doyumu, kapalı-çevrim kararlılığını bozacak kadar önemli doğrusal olmayan bir problemdir [3].

Sistemlerdeki parametre belirsizlikleri denetleyici tasarımlarında dikkate alınması gereken diğer bir önemli problemdir. Birçok denetim sisteminde, sistem parametreleri ya tam olarak belirlenememekte ya da işletme şartlarına bağlı olarak zamanla değişiklik göstermektedir. Parametre belirsizliğinin sistemin performansı ve kararlılığı üzerinde olumsuz etkileri olabilmektedir. Bu nedenle, denetleyici tasarımlarında parametre belirsizliği olayının matematiksel olarak sistemin dinamiğine dahil edilerek dayanıklı

denetleyici tasarımlarının gerçekleştirilmesi gerekmektedir [4].

Literatürde kapalı-çevrim sistemler için kararlılık ve performans problemlerine neden olan eyleyici gecikmesi, eyleyici doyumu ve parametre belirsizliği olaylarının birlikte ele alınıp incelendiği çalışmalar oldukça sınırlıdır. Bu üç dinamik, özellikle bozucu girişler etkisi altındaki yapısal sistemlerin titreşimlerinin aktif kontrolü çalışmalarında, denetim performansının kötüleşmesine ve kapalı-çevrim döngüsünün kırılmasıyla sistemin kararsız davranış sergilemesine veya performans kaybına neden olan başlıca problemler olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle bu çalışmada, doyumlu eyleyiciye sahip, eyleyici gecikmeli belirsizlik içeren çok serbestlik dereceli yapısal sistemlerin enerjisi sınırlı bozucu etkiler altındaki titreşimlerinin aktif kontrolü çalışmalarında etkin olarak kullanılacak, pratikte uygulanabilir, daha az tutucu, dayanıklı gecikmeye-bağlı yeni bir  $H_\infty$  denetleyici tasarımı gerçekleştirilmiştir. Geliştirilen denetleyici tasarımının en önemli aracı dışbükey en iyileştirme temelindeki LMI olmuştur. Gecikmeye bağlı yeterli kararlılık koşulları  $H_\infty$  sentezini kararlı kılmak amacıyla matris eşitsizlikleri yaklaşımıyla uygun Lyapunov-Krasovskii aday fonksiyonlarının seçimi ile elde edilmiştir. Daha sonra problem genişletilerek eyleyici doyumu problemi denetim sistemine dahil edilmiştir. Doyumlu eyleyici yapısının elde edilmesinde, modifiye edilmiş sektör koşulları kullanılarak denetim işareti üzerinden LMI şeklinde türetilen kısıtlar ile doyumlu eyleyiciye sahip denetleyici yapısı elde edilmiştir. Son olarak probleme parametre belirsizliği zamanla değişen normu sınırlı parametre belirsizliği yapısında dahil edilerek dayanıklı denetleyici tasarımı gerçekleştirilmiştir. Tasarım sonucu yeterli kararlılık koşullarının doğrusal olmayan matris eşitsizliği formunda elde edilmesi probleminin çözümü için, konik tamamlayıcı algoritmasından yararlanılmıştır. Daha az tutucu ve hızlı çözümler üretebilen

konik tamamlayıcı algoritma ile dışbükey olmayan en iyileştirme problemi çözümlenerek, alt en iyi denetleyici kazancına, en düşük bozucu bastırma seviyesine, erişilebilir en üst eyleyici gecikmesi ve parametre belirsizliği sınırlarına arzu edilen eyleyici doyumu limitinde kapalı-çevrim sistemin küresel asimptotik kararlılığı altında eş zamanlı olarak erişilmiştir. Sistemin dinamiği üzerinde olumsuz etkileri olan bu problemlerin, yeterli kararlılık kısıtlarındaki sınırlarının eş zamanlı olarak belirlenmesinde bir ödünleşmenin yaşanması kaçınılmazdır. Çok amaçlı denetim problemlerinin çözümünde yaşanan bu ödünleşme olayı tutuculuğu arttırmaktadır. Bu nedenle, çalışmada daha az tutucu denetleyici yapısına erişebilmek için, denetleyici tasarımında tutuculuğu azaltan serbest gevşetme matrisleri ve tam kareye tamamlama yöntemleri kullanılmıştır. Tasarlanan çok amaçlı denetleyicinin performansı, eyleyici gecikmesi, eyleyici doyumu ve parametre belirsizliği olaylarının önemli bir problem olarak ortaya çıktığı sismik zorlanma altındaki yapısal sistemlerin titreşimlerinin azaltılması problemi için yapılan benzetim çalışmalarıyla gösterilmiştir.

## 2. PROBLEMİN TANIMLANMASI

Zamanla değişen eyleyici gecikmeli bir sistem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_h u(t-h(t)) + B_w w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t), \quad x(t) = 0, \quad t \in [-\bar{h}, 0] \end{aligned} \quad (1)$$

şeklinde ele alınsın. Burada,  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  sistemin durum vektörünü,  $u(t) \in \mathcal{R}^{m_u}$  sistemin denetim girişini,  $w(t) \in \mathcal{R}^{m_w}$  sistem üzerindeki bozucu girişi ve  $z(t) \in \mathcal{R}^p$  denetlenmek istenen çıkışları göstermektedir.  $A$ ,  $B_h$ ,  $B_w$ ,  $C$  ve  $D$  matrisleri sistemin uygun boyutlu bilinen sabit durum-uzay matrisleridir. Bunu yanında zaman gecikmesi  $h(t)$ ,

$$0 \leq h(t) < \bar{h}, \quad |\dot{h}(t)| < \mu, \quad \forall t \geq 0. \quad (2)$$

eşitsizliği sağlayan sürekli zamanla değişen bir fonksiyon olarak tanımlanmıştır. Burada,  $\bar{h}$  ve  $\mu$  gecikme zamanının ve türevinin üst sınırını veren bilinen pozitif sabittir. Bu çalışmada sistem üzerinde etkin olan bozucu sinyalin sınırlı enerjiye sahip olduğu kabul edilmiştir. Bu durumda,

$$W_\delta := \{w : \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}^{m_w} : \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt < \infty\} \quad (3)$$

geçerlidir. Bu çalışmada amaç, kapalı-çevrim sistemin küresel asimptotik kararlılığını sağlayacak ve bozuculardan sistem çıkışına en küçük  $H_\infty$  kazancını veren,  $u(t) = Kx(t)$  formunda uygun bir durum geri-beslemeli denetim kuralı bulmaktır. Bu türden denetim kuralı vasıtasıyla sistemin kapalı-çevrim durum-uzay modeli,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_h Kx(t-h(t)) + B_w w(t) \\ z(t) &= (C + DK)x(t), \quad x(t) = 0, \quad t \in [-\bar{h}, 0] \end{aligned} \quad (4)$$

şeklinde elde edilebilir.

## 3. BAŞLICA SONUÇLAR

Nominal zamanla değişen eyleyici gecikmeli bir sistemin  $H_\infty$  kararlılığının araştırılması için

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + H_k x(t-h(t)) + B_w w(t) \\ z(t) &= \bar{C}x(t), \quad x(t) = 0, \quad t \in [-\bar{h}, 0] \end{aligned} \quad (5)$$

sistemi ele alınsın. Aşağıdaki SRYT, (5) sistemi için yeterli kararlılık koşullarını sunmaktadır [5].

**Yardımcı Teorem 3.1:**  $\bar{h}$ ,  $\mu$  ve  $\gamma$  gibi pozitif skaler sabitleri verilmiş olsun. Aşağıdaki matris eşitsizliklerini sağlayan simetrik pozitif tanımlı  $P$ ,  $Q$ ,  $W$ ,  $Z$ , matrisleri ve uygun boyutlu  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  matrisleri varsa, nominal zamanla değişen eyleyici gecikmeli (5) sistemi, (2)'yi sağlayan herhangi bir zamanla değişen  $h(t)$  zaman gecikmesi değeri için,  $\gamma$  gibi bir bozucu azaltma seviyesi ile küresel asimptotik kararlı olur.

$$\bar{\Sigma} := \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_{11} & \bar{\Sigma}_{12} & -S_1 & PB_w & \bar{h}A^T Z & \bar{h}N_1 & \bar{h}S_1 & \bar{C}^T \\ * & \bar{\Sigma}_{22} & -S_2 & 0 & \bar{h}H_k^T Z & \bar{h}N_2 & \bar{h}S_2 & 0 \\ * & * & -W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & \bar{h}B_w^T Z & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}Z & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -Z & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -Z & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

Burada,

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_{11} &:= PA + A^T P + N_1 + N_1^T + Q + W, \quad \bar{\Sigma}_{12} := PH_k - N_1 + N_2^T + S_1, \\ \bar{\Sigma}_{22} &:= -(1-\mu)Q + S_2 + S_2^T - N_2 - N_2^T \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

**İspat:** Aşağıdaki gibi bir Lyapunov-Krasovskii aday fonksiyoneli seçilebilir.

$$\begin{aligned} V(x(t), t) &= x^T(t)Px(t) + \int_{-\bar{h}}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)dsd\beta \\ &+ \int_{t-h(t)}^t x^T(s)Qx(s)ds + \int_{t-\bar{h}}^t x^T(s)Wx(s)ds \end{aligned}$$

$V(x(t), t)$ 'nin (5) sisteminin durum yörüngeleri boyunca  $t'$ 'ye göre türevi (2)'deki şartlara bağlı olarak

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), t) \leq & 2x^T(t)P(Ax(t) + H_k x(t-h(t)) + B_w w(t)) \\ & + \bar{h}(Ax(t) + H_k x(t-h(t)) + B_w w(t))^T Z(Ax(t) \\ & + H_k x(t-h(t)) + B_w w(t)) - \int_{t-\bar{h}}^t \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds \\ & + (1-\dot{h}(t))x^T(t)Qx(t) - x^T(t-h(t))Qx(t-h(t)) \\ & + x^T(t)Wx(t) - x^T(t-\bar{h})W(t-\bar{h}). \end{aligned} \quad (7)$$

şeklinde sınırlanabilir. Bunu yanında;

$$-\int_{t-\bar{h}}^t \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds = -\int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds - \int_{t-\bar{h}}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds \quad (8)$$

ve  $N_1, N_2, S_1, S_2$  gibi uygun boyutlu matrisleri için Newton-Leibnitz bağıntısı, bize

$$\begin{aligned} 2(x^T(t)N_1 + x^T(t-h(t))N_2) \times (x(t) - x(t-h(t))) - \int_{t-h(t)}^t \dot{x}(s)ds &= 0 \\ 2(x^T(t)S_1 + x^T(t-h(t))S_2) \times (x(t-h(t)) - x(t-\bar{h})) - \int_{t-\bar{h}}^{t-h(t)} \dot{x}(s)ds &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

null eşitliklerini yazabilmemizi sağlamaktadır. Daha sonra (9)'da verilen null-eşitlikleri, (8) ve (2)'den yararlanılarak (7)'nin sağına eklenmesiyle,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), t) \leq & 2x^T(t)PAx(t) + 2x^T(t)PH_k x(t-h(t)) + 2x^T(t)PB_w w(t) \\ & + \bar{h}x^T(t)A^T ZAx(t) + \bar{h}x^T(t)A^T ZH_k x(t-h(t)) \\ & + \bar{h}x^T(t)A^T ZB_w w(t) + \bar{h}x^T(t-h(t))H_k^T ZAx(t) \\ & + \bar{h}x^T(t-h(t))H_k^T ZH_k x(t-h(t)) + \bar{h}x^T(t-h(t))H_k^T ZB_w w(t) \\ & + \bar{h}w^T(t)B_w^T ZAx(t) + \bar{h}w^T(t)B_w^T ZH_k x(t-h(t)) \\ & + \bar{h}w^T(t)B_w^T ZB_w w(t) - \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds - \int_{t-\bar{h}}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds \\ & + 2(x^T(t)N_1 + x^T(t-h(t))N_2) \times (x(t) - x(t-h(t))) - \int_{t-h(t)}^t \dot{x}(s)ds \\ & + 2(x^T(t)S_1 + x^T(t-h(t))S_2) \times (x(t-h(t)) - x(t-\bar{h})) \\ & - \int_{t-\bar{h}}^{t-h(t)} \dot{x}(s)ds + x^T(t)Qx(t) - (1-\mu)x^T(t-h(t))Qx(t-h(t)) \\ & + x^T(t)Wx(t) - x^T(t-\bar{h})Wx(t-\bar{h}) \end{aligned} \quad (10)$$

eşitsizliği elde edilebilir. Aşağıdaki negatif olmayan terimlerin oluşturulmasında, tam kareye tamamlama işlemindeki yol izlenir.

$$\begin{aligned} 0 \leq & -\int_{t-h(t)}^t (x^T(s)N_1 + x^T(s-h(s))N_2 + \dot{x}^T(s)Z^{-1}(N_1^T x(s) \\ & + N_2^T x(s) + N_2^T x(s-h(s)) + Z\dot{x}(s))ds \\ & + \bar{h}x^T(t)N_1 Z^{-1}N_1^T x(t) + 2\bar{h}x^T(t)N_1 Z^{-1}N_2^T x(t-h(t)) \\ & + \bar{h}x^T(t-h(t))N_2 Z^{-1}N_2^T x(t-h(t)) \end{aligned} \quad (11)$$

ve benzer şekilde,

$$\begin{aligned} 0 \leq & -\int_{t-\bar{h}}^{t-h(t)} (x^T(s)S_1 + x^T(s-h(s))S_2 + \dot{x}^T(s)Z^{-1}(S_1^T x(s) \\ & + S_2^T x(s) + S_2^T x(s-h(s)) + Z\dot{x}(s))ds \\ & + \bar{h}x^T(t)S_1 Z^{-1}S_1^T x(t) + 2\bar{h}x^T(t)S_1 Z^{-1}S_2^T x(t-h(t)) \\ & + \bar{h}x^T(t-h(t))S_2 Z^{-1}S_2^T x(t-h(t)) \end{aligned} \quad (12)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Buradan (10) eşitsizliğinin (11) ve (12) ile düzenlenmesiyle,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), t) \leq & 2x^T(t)PAx(t) + 2x^T(t)PH_k x(t-h(t)) + 2x^T(t)PB_w w(t) \\ & + \bar{h}x^T(t)A^T ZAx(t) + \bar{h}x^T(t)A^T ZH_k x(t-h(t)) \\ & + \bar{h}x^T(t)A^T ZB_w w(t) + \bar{h}x^T(t-h(t))H_k^T ZAx(t) \\ & + \bar{h}x^T(t-h(t))H_k^T ZH_k x(t-h(t)) + \bar{h}x^T(t-h(t))H_k^T ZB_w w(t) \\ & + \bar{h}w^T(t)B_w^T ZAx(t) + \bar{h}w^T(t)B_w^T ZH_k x(t-h(t)) \\ & + \bar{h}w^T(t)B_w^T ZB_w w(t) + 2x^T(t)N_1 x(t) - 2x^T(t)N_1(t)x(t) \\ & - 2x^T(t)N_1 x(t-h(t)) + 2x^T(t-h(t))N_2 x(t) \\ & - 2x^T(t-h(t))N_2 x(t-h(t)) + \bar{h}x^T(t)N_1 Z^{-1}N_1^T x(t) \\ & + 2\bar{h}x^T(t)N_1 Z^{-1}N_2^T x(t-h(t)) + \bar{h}x^T(t-h(t))N_2 Z^{-1}N_2^T x(t-h(t)) \\ & + \bar{h}x^T(t)S_1 Z^{-1}S_1^T x(t) + 2\bar{h}x^T(t)S_1 Z^{-1}S_2^T x(t-h(t)) \\ & + \bar{h}x^T(t-h(t))S_2 Z^{-1}S_2^T x(t-h(t)) + x^T(t)Q(t) \\ & - (1-\mu)x^T(t-h(t))Qx(t-h(t)) + 2x^T(t)S_1 x(t-h(t)) \\ & - 2x^T(t)S_1 x(t-\bar{h}) + 2x^T(t-h(t))S_2 x(t-h(t)) \\ & - 2x^T(t-h(t))S_2 x(t-\bar{h}) + x^T(t)Wx(t) - x^T(t-\bar{h})Wx(t-\bar{h}) \end{aligned} \quad (13)$$

seçilen Lyapunov-Krakovskii aday fonksiyonelinin türevi elde edilir. Genişletilmiş durum vektörü  $\hat{z}^T := [x^T(t) \ x^T(t-h(t)) \ x^T(t-\bar{h}) \ w^T(t)]$  olarak tanımlanabilir. Eğer  $\hat{\Omega} < 0$  sağlınırsa,  $\dot{V}(x(t), t) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \leq \hat{z}^T(t)\hat{\Omega}\hat{z}(t)$  olur.

Buradan  $\hat{\Omega}$ ,

$$\hat{\Omega} := \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_{11} & \hat{\Omega}_{12} & -S_1 & \hat{\Omega}_{14} \\ * & \hat{\Omega}_{22} & -S_2 & \hat{\Omega}_{24} \\ * & * & -W & 0 \\ * & * & * & \hat{\Omega}_{44} \end{bmatrix} \quad (14)$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada,

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_{11} &= PA + A^T P + \bar{h}A^T ZA + N_1 + N_1^T + \bar{h}N_1 Z^{-1}N_1^T + \bar{h}S_1 Z^{-1}S_1^T + Q + W \\ &+ \bar{C}^T \bar{C}, \quad \hat{\Omega}_{12} = PH_k + \bar{h}A^T ZH_k - N_1 + \bar{h}N_1 Z^{-1}N_2^T + N_2^T + S_1 + \bar{h}S_1 Z^{-1}S_2, \\ \hat{\Omega}_{14} &= \bar{h}A^T ZB_w + PB_w, \quad \hat{\Omega}_{22} = \bar{h}H_k^T ZH_k - N_2 - N_2^T + \bar{h}N_2 Z^{-1}N_2^T + \\ &\bar{h}S_2 Z^{-1}S_2^T - (1-\mu)Q + S_2 + S_2^T, \quad \hat{\Omega}_{24} = \bar{h}H_k^T ZB_w, \quad \hat{\Omega}_{44} = B_w^T ZB_w - \gamma^2 I \end{aligned}$$

şeklinde dir.  $\forall t \geq 0$  için  $w(t) \equiv 0$  olduğunda,  $\dot{V}(x(t), t) < 0$ , (5) sisteminin küresel asimptotik olarak kararlı olduğunu garanti eder. Ayrıca,  $\dot{V}(x(t), t) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \leq 0$  her iki taraftan 0'dan sonsuza kadar entegre edilirse;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t), t) - V(x(0), 0) + \int_0^\infty z^T(t)z(t)dt - \gamma^2 \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt < 0$$

elde edilir.

Burada,  $V(x(0), 0) = 0$  ve  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t), t) > 0$  olduğu için,

$\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt - \gamma^2 \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt < 0$  ifadesi geçerlidir ve bu  $\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2 \ \forall w(t) \in L_2[0, \infty)$  anlamına gelir. Sonuç olarak, Schur

tümleyen [6], (14)'e uygulanmasıyla, (6)'da verilen LME elde edilir. Bu şekilde ispat sonlandırılmış olur.  $\square$

(5) Sisteminde  $H_k$  'nın,  $B_h K$  ile  $\bar{C}$  'ın  $C + DK$  ile yer değiştirmesiyle (4) kapalı-çevrim sistemi elde edilir.  $\bar{L} = KX$  olarak tanımlanması ve Yardımcı Teorem 3.1'in genişletilmesiyle  $u(t) = Kx(t)$  formunda durum geri-beslemeli  $H_\infty$  denetleyici sentezini veren Teorem 3.1 aşağıdaki gibi elde edilebilir.

**Teorem 3.1**  $\bar{h}$ ,  $\mu$  ve  $\gamma$  gibi pozitif skaler sabitleri verilmiş olsun. Aşağıdaki matris eşitsizliklerini sağlayan, simetrik pozitif tanımlı  $X$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{W}$ ,  $\bar{Z}$ ,  $T$  matrisleri ve uygun boyutlu  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$ ,  $\bar{S}_1$ ,  $\bar{S}_2$ ,  $\bar{L}$  matrisleri varsa, (4) kapalı-çevrim sistemi,  $u(t) = \bar{L}X^{-1}x(t)$  denetim kuralı altında (2)'yi sağlayan herhangi bir zamanla değişen  $h(t)$  zaman gecikmesi değeri için,  $\gamma$  gibi bir bozucu azaltma seviyesi ile küresel asimptotik kararlı olur.

$$\Xi := \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & -\bar{S}_1 & B_w & 0 & \bar{h}\bar{N}_1 & \bar{h}\bar{S}_1 & \Xi_{18} & 0 & XC^T + \Gamma^T D^T \\ * & \Xi_{22} & -\bar{S}_2 & 0 & 0 & \bar{h}\bar{N}_2 & \bar{h}\bar{S}_2 & \Xi_{28} & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{W} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & \bar{h}B_w^T & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}\bar{Z} & 0 & 0 & 0 & \bar{Z} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -XT^{-1}X & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

Burada,

$$\begin{aligned} \Xi_{11} &= AX + XA^T + \bar{N}_1 + \bar{N}_1^T + \bar{Q} + \bar{W}, & \Xi_{12} &= B_h \bar{L} - \bar{N}_1 + \bar{N}_2^T + \bar{S}_1 \\ \Xi_{18} &= \bar{h}XA^T, & \Xi_{22} &= -(1-\mu)\bar{Q} + \bar{S}_2 + \bar{S}_2^T - \bar{N}_2 - \bar{N}_2^T, & \Xi_{28} &= \bar{h}\bar{L}^T B_h^T \end{aligned}$$

olmak üzere üzere,  $\gamma$ ,  $\forall t \geq 0$  için  $w(t)$ 'den  $z(t)$ 'ye kapalı-çevrim sistemin  $H_\infty$  normunun üst sınırıdır ve  $u(t) = \bar{L}X^{-1}x(t)$ ,  $H_\infty$  denetleyicinin  $\gamma$  ile ilişkili denetim kuralıdır.

**İspat:** Schur tümleyen (14) matris eşitsizliğine uygulanmasıyla  $\hat{\Omega} < 0$  eşdeğer olarak,

$$\tilde{\Omega} := \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_{11} & \tilde{\Omega}_{12} & -S_1 & PB_w & \bar{h}A^T Z & \bar{h}\bar{N}_1 & \bar{h}\bar{S}_1 & C^T + K^T D^T \\ * & \tilde{\Omega}_{22} & -S_2 & 0 & \bar{h}K^T B_h^T Z & \bar{h}\bar{N}_2 & \bar{h}\bar{S}_2 & 0 \\ * & * & -W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & \bar{h}B_w^T Z & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \bar{h}\bar{Z} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -Z & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -Z & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\hat{\Omega}_{11} := PA + A^T P + N_1 + N_1^T + Q + W, \quad \hat{\Omega}_{12} := PB_h K - N_1 + N_2^T + S_1$$

$$\hat{\Omega}_{22} := -(1-\mu)Q + S_2 + S_2^T - N_2 - N_2^T$$

şeklinde ifade edilebilir. (16) Eşitsizliği  $X := P^{-1}$  olmak üzere sağından ve solundan  $\text{diag}\{X, X, X, I, X, X, X, I\}$  ile çarpılması durumunda ve  $\bar{N}_1 := XN_1X$ ,  $\bar{N}_2 := XN_2X$ ,  $\bar{S}_1 := XS_1X$ ,  $\bar{S}_2 := XS_2X$ ,  $\bar{W} := XWX$ ,  $\bar{Z} := XZX$ ,  $\bar{Q} := XQX$  benzerlik dönüşümlerinin yapılmasıyla,

$$\hat{\Phi} := \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{11} & \hat{\Phi}_{12} & -\bar{S}_1 & B_w & \bar{h}XA^T X^{-1} \bar{Z} & \bar{h}\bar{N}_1 & \bar{h}\bar{S}_1 & XC^T + XK^T D^T \\ * & \hat{\Phi}_{22} & -\bar{S}_2 & 0 & \bar{h}XK^T B_h^T X^{-1} \bar{Z} & \bar{h}\bar{N}_2 & \bar{h}\bar{S}_2 & 0 \\ * & * & -\bar{W} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & \bar{h}B_w^T X^{-1} \bar{Z} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}\bar{Z} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{Z} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{Z} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada,

$$\hat{\Phi}_{11} := AX + XA^T + \bar{N}_1 + \bar{N}_1^T + \bar{Q} + \bar{W}, \quad \hat{\Phi}_{12} := B_h KX - \bar{N}_1$$

$$+ \bar{N}_2^T + \bar{S}_1, \quad \hat{\Phi}_{22} := -(1-\mu)\bar{Q} + \bar{S}_2 + \bar{S}_2^T - \bar{N}_2 - \bar{N}_2^T$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\hat{\Phi}$ , bileşenlerine ayrıştırılarak  $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_1 + \hat{\Phi}_1^T$  ifadesi elde edilir. Burada,

$$\hat{\Phi}_0 := \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{11} & \hat{\Phi}_{12} & -\bar{S}_1 & B_w & 0 & \bar{h}\bar{N}_1 & \bar{h}\bar{S}_1 & XC^T + XK^T D^T \\ * & \hat{\Phi}_{22} & -\bar{S}_2 & 0 & 0 & \bar{h}\bar{N}_2 & \bar{h}\bar{S}_2 & 0 \\ * & * & -\bar{W} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}\bar{Z} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{Z} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{Z} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix}$$

ve

$$\hat{\Phi}_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{h}XA^T X^{-1} \bar{Z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{h}XK^T B_h^T X^{-1} \bar{Z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{h}B_w^T X^{-1} \bar{Z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Açık ki,  $\hat{\Phi}_1$ ,  $\hat{\Phi}_1 = \Pi_1^T X^{-1} \Pi_2$  olarak yazılabilir. Burada,  $\Pi_1 = [\bar{h}AX \quad \bar{h}B_h KX \quad 0 \quad \bar{h}B_w \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ ,

$\Pi_2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{Z} \quad 0 \quad 0 \quad 0]$  dir. Bunun yanında  $T$  gibi herhangi bir pozitif tanımlı simetrik matris için  $\Pi_1^T X^{-1} \Pi_2 + (\Pi_1^T X^{-1} \Pi_2)^T \leq \Pi_1^T T^{-1} \Pi_1 + \Pi_2^T (XT^{-1}X)^{-1} \Pi_2$  eşitsizliği geçerlidir. Bundan dolayı,  $\hat{\Phi}_0 + \Pi_1^T T^{-1} \Pi_1 + \Pi_2^T (XT^{-1}X)^{-1} \Pi_2 < 0$  ifadesi  $\hat{\Phi} < 0$  şeklinde belirtilir. Daha sonar Schur tümleyeni ile  $\hat{\Phi}_0 + \Pi_1^T T^{-1} \Pi_1 + \Pi_2^T (XT^{-1}X)^{-1} \Pi_2 < 0$  ifadesinden, ve  $\bar{L} := KX$  olarak tanımlanması

ile (15)'de verilen matris eşitsizliği şartları elde edilir. Teorem 3.1'in ışığında, tüm  $t \geq 0$  için,  $w(t)$ 'den  $z(t)$ 'ye en küçük  $H_\infty$  normunu elde etmek amacıyla,  $X$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{W}$ ,  $\bar{Z}$ ,  $T$  simetrik pozitif tanımlı matrisleri ve uygun boyutlu  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$ ,  $\bar{S}_1$ ,  $\bar{S}_2$ ,  $\bar{L}$  matrisleri ve pozitif skaler  $\gamma$  için aşağıdaki doğrusal olmayan en iyileştirme problemi çözülebilir.

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{kosul : (15)} \end{aligned}$$

Eğer yukarıdaki en iyileştirme probleminin çözümü varsa, verilen problem için alt en iyi denetleyici  $u(t) = \bar{L}X^{-1}x(t)$  denetim kuralı tarafından oluşturulabileceği söylenebilir. (15)'deki matris eşitsizliği şartları, doğrusal olmayan  $-XT^{-1}X$  teriminden dolayı doğrusal matris eşitsizliği formunda değildir. Bu nedenle, yukarıdaki en iyileştirme problemi için bir küresel en küçük değeri dışbükey en iyileştirme problemi çözümünde kullanılan yöntemlerle bulamayız. Buna karşın konik tamamlayıcı yöntem ile dışbükey bir en iyileştirme algoritması ile problem için alt en iyi denetleyici elde edilebilir. İlk olarak  $R = R^T > 0$  gibi yeni bir değişken  $R \leq XT^{-1}X$  şartıyla tanımlanır ve (15)'deki kısıtlar aşağıdaki eşitsizliklerle yer değiştirilir.

$$\text{LMI} := \begin{bmatrix} \bar{\Xi}_{11} & \bar{\Xi}_{12} & -\bar{S}_1 & B_w & 0 & \bar{h}\bar{N}_1 & \bar{h}\bar{S}_1 & \bar{\Xi}_{18} & 0 & XC^T + \bar{L}^T D^T \\ * & \bar{\Xi}_{22} & -\bar{S}_1 & 0 & 0 & \bar{h}\bar{N}_2 & \bar{h}\bar{S}_2 & \bar{\Xi}_{28} & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{W} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & \bar{h}B_w^T & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}\bar{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{Z} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -T & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -R & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -1 \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Xi}_{11} &= AX + XA^T + \bar{N}_1 + \bar{N}_1^T + \bar{Q} + \bar{W}, \quad \bar{\Xi}_{12} = B_h \bar{L} - \bar{N}_1 + \bar{N}_2^T + \bar{S}_1, \\ \bar{\Xi}_{18} &= \bar{h}XA^T, \quad \bar{\Xi}_{22} = -(1-\mu)\bar{Q} + \bar{S}_2 + \bar{S}_2^T - \bar{N}_2 - \bar{N}_2^T, \quad \bar{\Xi}_{28} = \bar{h}\bar{L}^T B_h^T \\ \begin{bmatrix} \bar{R} & \bar{X} \\ \bar{X} & \bar{T} \end{bmatrix} &\geq 0, \quad \begin{bmatrix} \bar{R} & I \\ I & R \end{bmatrix} &\geq 0, \quad \begin{bmatrix} \bar{X} & I \\ I & X \end{bmatrix} &\geq 0, \quad \begin{bmatrix} \bar{T} & I \\ I & T \end{bmatrix} &\geq 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Buradan,  $R^{-1} - X^{-1}TX^{-1} \geq 0$  eşitsizliği elde edilebilir ve Schur tümleyeni ile  $\bar{R} := R^{-1}$ ,  $\bar{X} := X^{-1}$ ,  $\bar{T} := T^{-1}$  tanımlamaları (19)'daki eşitsizliklerin elde edilmesini sağlar.

Doymulu eyleyiciler, LMI kısıtları şeklinde doğrudan denetim sinyali üzerinden matematiksel olarak elde edilebilir. Uygulanabilir bir kısıt içeren denetim sinyali verilen  $u_{\max}$  sınırı ile  $\|u\|_2 \leq u_{\max}$  olarak ifade edilebilir. Daha sonra, Euclid normu

$\|u\|_2 \leq u_{\max} \Leftrightarrow \sqrt{u^T u} \leq u_{\max} \Leftrightarrow u^T u \leq u_{\max}^2$ , şeklinde tanımlanır.  $u(t) = Kx(t)$  ve  $\bar{L} := KX$  olduğundan,

$$\frac{x^T(t)X^{-1}\bar{L}^T\bar{L}X^{-1}x(t)}{u_{\max}^2} \leq 1 \quad (20)$$

eşitsizliği elde edilebilir. Eğer  $\Xi_p = \{x \mid x^T(t)Px(t) \leq 1\}$  şeklinde bir elipsoid tanımlanırsa, (20) eşitsizliği

$$x(t) \in \Xi_{\frac{X^{-1}\bar{L}^T\bar{L}X^{-1}}{u_{\max}^2}}$$

olarak yazılabilir. Buradan sınırlandırılmış kontrol kuvvetini elde etmek için

$$\Xi_p = \Xi_{X^{-1}} \subseteq \Xi_{\frac{X^{-1}\bar{L}^T\bar{L}X^{-1}}{u_{\max}^2}}$$

tanımlamasına ihtiyaç vardır ve buradan

$$X^{-1} \geq \frac{X^{-1}\bar{L}^T\bar{L}X^{-1}}{u_{\max}^2} \quad (21)$$

eşitsizliği elde edilir. Congruence dönüşümü ile (21) eşitsizliği öntünden ve arkasından  $X$  ile çarpılırsa

$$X \geq \frac{\bar{L}^T\bar{L}}{u_{\max}^2}$$

ifadesi elde edili ve bu da Schur tümleyen ile denetim kuvvetini sınırlayan aşağıdaki matris eşitsizliği ifadesini yazılmasını sağlar.

$$\begin{bmatrix} X & \bar{L}^T \\ \bar{L} & u_{\max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (22)$$

Bu eşitsizliğin çok amaçlı denetim problemine dahil edilmesiyle, fiziksel sistemin doymulu eyleyiciye sahip olması sağlanır.

Denetim sistemine normu sınırlı parametre belirsizliği yapısının eklenmesi ve dayanıklı denetleyici tasarımı ise aşağıdaki gibi gerçekleştirilir. Eyleyici gecikmesine sahip belirsizlik içeren bir sistemin durum-uzay modeli,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + B_h u(t - h(t)) + B_w w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t), \quad x(t) = 0, \quad t \in [-\bar{h}, 0] \end{aligned} \quad (23)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,  $\Delta A$  zamanla değişen parametre belirsizliği matrisini göstermektedir. Çalışmada, parametre belirsizliği,

$$\Delta A = GF(t)E_A \quad (24)$$

biçiminde normu sınırlı belirsizlik yapısında oluşturulmuştur. Burada,  $G$  ve  $E_A$  bilinen, sabit, gerçek matrisleri ve  $F(t)$  her  $t \geq 0$  için  $F^T(t)F(t) \leq I$ 'yi sağlayan, Lebesgue ölçülebilir sınırlı bilinmeyen matris fonksiyonunu göstermektedir.

Aşağıdaki teorem zamanla değişen eyleyici gecikmesine sahip, belirsizlik içeren, (23) sistemi için yeter kararlılık ve performans koşullarını sunmaktadır.

**Teorem 3.2:**  $\bar{h}$ ,  $\mu$  ve  $\gamma$  gibi pozitif skaler sabitleri verilmiş olsun. Aşağıdaki matris eşitsizliklerini sağlayan, simetrik pozitif tanımlı  $X$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{W}$ ,  $\bar{Z}$ ,  $T$  matrisleri ve uygun boyutlu  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$ ,  $\bar{S}_1$ ,  $\bar{S}_2$ ,  $\bar{L}$ , matrisleri varsa, ve  $\varepsilon > 0$  olmak üzere, (23) sistemi, durum geri-beslemeli  $u(t) = \bar{L}X^{-1}x(t)$  denetim kuralı altında (2)'yi sağlayan herhangi bir zamanla değişen  $h(t)$  zaman gecikmesi değeri için, dayanıklı olarak küresel asimptotik kararlı olur.

$$\Psi = \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{11} & \hat{\Psi}_{12} & -\bar{S}_1 & B_w & 0 & \bar{h}\bar{N}_1 & \bar{h}\bar{S}_1 & \hat{\Psi}_{18} & 0 & XC^T + \bar{L}^T D^T & \hat{\Psi}_{111} \\ * & \hat{\Psi}_{22} & -\bar{S}_1 & 0 & 0 & \bar{h}\bar{N}_2 & \bar{h}\bar{S}_2 & \hat{\Psi}_{28} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{W} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & \bar{h}B_w^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}\bar{Z} & 0 & 0 & 0 & \bar{Z} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \hat{\Psi}_{38} & 0 & 0 & 0 & \hat{\Psi}_{311} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -XT^{-1}X & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} X & \bar{L}^T \\ \bar{L} & u_{\max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (26)$$

Burada,

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{11} &= AX + XA^T + \bar{N}_1 + \bar{N}_1^T + \bar{Q} + \bar{W} + \varepsilon GG^T, \\ \hat{\Psi}_{18} &= \varepsilon GG^T + \bar{h}XA^T, \hat{\Psi}_{28} = \varepsilon GG^T - T, \hat{\Psi}_{111} = XE_A^T, \\ \hat{\Psi}_{311} &= XE_A^T \end{aligned}$$

olmak üzere,  $\gamma$ ,  $\forall t \geq 0$  için  $w(t)$ 'den  $z(t)$ 'ye kapalı-çevrim sistemin  $H_\infty$  normunun üst sınıridir ve  $u(t) = \bar{L}X^{-1}x(t)$ ,  $H_\infty$  denetleyicinin  $\gamma$  ile ilişkili denetim kuralıdır.

**İspat: Yardımcı Teorem 3.2:** [3] Verilen uygun boyutlu  $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}^T$ ,  $J$  ve  $H$  matrisleri için

$$\bar{\Gamma} + JF(t)H + H^T F^T(t)J^T < 0 \quad (27)$$

geçerlidir ve  $F(t)$ ,  $F^T(t)F(t) \leq I$  şartını sağlayan gerçek bir matris fonksiyonu olmak üzere ancak ve ancak  $\varepsilon > 0$  gibi bir skaler varsa,

$$\bar{\Gamma} + \varepsilon^{-1}JJ^T + \varepsilon H^T H < 0 \quad (28)$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradan hareketle  $A$ ,  $A = A + \Delta A$  olarak değiştirilir ve

$$J^T := [G^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ G^T \ 0 \ 0],$$

$$H := [E_A X \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

ifadelerinin tanımlanmasıyla (15)'in yerine  $\Xi + JF(t)H + H^T F^T(t)J^T < 0$  koşulları elde edilir.  $F^T(t)F(t) < I$  için  $\Xi + JF(t)H + H^T F^T(t)J^T < 0$  geçerlidir ve eğer  $\varepsilon > 0$  mevcut ise,  $\Xi + \varepsilon^{-1}JJ^T + \varepsilon H^T H < 0$  dir. Bunun sonucu olarak, Schur tümleyen ile ispatı sonlandıran (25) matris eşitsizliği şartlarının oluşturulması sağlanır.  $\square$

Teorem 3.2'nin ışığında, tüm  $t \geq 0$  için,  $w(t)$ 'den  $z(t)$ 'ye en küçük  $H_\infty$  normunu elde etmek amacıyla,  $X$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{W}$ ,  $\bar{Z}$ ,  $T$  matrisleri ve uygun boyutlu  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$ ,  $\bar{S}_1$ ,  $\bar{S}_2$ ,  $\bar{L}$ , matrisleri varsa, ve pozitif skaler  $\gamma$  için aşağıdaki doğrusal olmayan en iyileştirme problemi çözülebilir.

$$\begin{aligned} \min \gamma \\ \text{kosullar: (25), (26)} \end{aligned}$$

(25) Eşitsizliğindeki doğrusal olmayan  $-XT^{-1}X$  terimi nedeniyle yukarıda tanımlanan en iyileştirme problemi için bir küresel en küçük değerine, konik tamamlayıcı algoritması kullanılarak ulaşılabilir. (25) Matris eşitsizliğinde  $-XT^{-1}X < 0$  teriminin,  $R = R^T > 0$  olmak üzere,  $R \leq XT^{-1}X$  şartının sağlanması durumu için  $-R < 0$  ile yer değiştirilmesi ve buradan hareketle (23)'de verilen sisteminin en küçük  $H_\infty$  normunu bulmak için,

$$\begin{aligned} \min iz (\bar{R}R + \bar{X}X + \bar{T}T) \\ \text{kosullar: (19), (25), (26)} \end{aligned}$$

doğrusallaştırılmış en iyileştirme problemi kullanılabilir. Sonuç olarak,  $\gamma_0$  gibi en küçük  $H_\infty$  kazancını,  $\bar{p}_0$  gibi en üst parametre belirsizliği sınırını ve  $\bar{h}_0$  gibi en büyük kabul edilebilir gecikme zamanı sınırını sağlayan alt en iyi denetleyici kazancına aşağıdaki konik tamamlayıcı algoritmasının çözülmesiyle ulaşılabilir [7].

**Algoritma:**

1.  $k=0$  yap ve (19), (25), (26)'daki LMI sağlayan  $\{\bar{X}_0, X_0, \bar{R}_0, R_0, \bar{T}_0, T_0\}$  gibi uygun bir



çözüm kümesini; yeterince küçük  $\bar{h}$ ,  $\bar{p}$  ve büyük bir  $\gamma$  başlangıç değerleri için tara.

2.  $\{\bar{X}, X, \bar{R}, R, \bar{T}, T\}$  değişkenleri için aşağıdaki LMI en iyileştirme problemini çöz

$$\min iz (\bar{R}_k R + \bar{X}_k X + \bar{T}_k T + \bar{R} R_k + \bar{X} X_k + \bar{T} T_k)$$

kosullar (19), (25), (26)

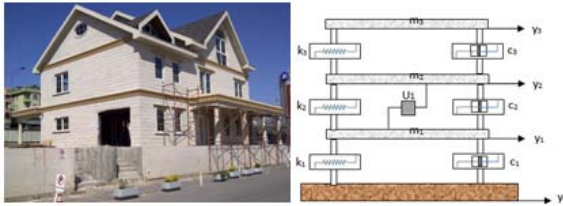
ve  $\bar{X}_{k+1} := \bar{X}$ ,  $X_{k+1} := X$ ,  $\bar{R}_{k+1} := \bar{R}$ ,  $R_{k+1} := R$ ,  $\bar{T}_{k+1} := \bar{T}$ ,  $T_{k+1} := T$  atamalarını gerçekleştir.

3. Eğer  $R \leq XT^{-1}X$  kısıtı yukarıdaki çözüm kümesi için uygunsa, o halde  $\gamma_0 = \gamma$ ,  $\bar{h}_0 = \bar{h}$ ,  $\bar{p}_0 = \bar{p}$  için  $\bar{h}$ ,  $\bar{p}$  bir miktar arttırıldıktan ve  $\gamma$  bir miktar azaltıldıktan ve sonra birinci adıma geri dön. Aksi taktirde küme  $k = k+1$  olarak al ikinci adıma git ve en iyileştirme işlemine gerekli iterasyon sayısı kadar, veya  $R \leq XT^{-1}X$  şartını sağlayıncaya kadar devam et. Eğer çözüm yoksa algoritmadan çık.

Bu algoritma ile uygun bir çözüm kümesi bulunabilirse, eyleyici doyumlu alt en iyi durum geri-beslemeli dayanıklı  $H_\infty$  denetleyici  $u(t) = \bar{L}X^{-1}x(t)$  formunda elde edilebilir.

#### 4. BENZETİM ÇALIŞMASI

Önerilen denetleyicinin etkinliğini göstermek için, Şekil 1'de gösterilen üç katlı yapısal sistem modellenmiştir [8]. Modellenen yapısal sistem, İstanbul Pendik'te Hekim Holding A.Ş.'ye ait çelik konstrüksiyon olarak inşa edilmiş bir yapıdır.



Şekil 1: Yapısal sistemin fiziksel modeli.

Depremlerin yıkıcı etkileri genelde yatay titreşimlerin bir sonucu olarak ortaya çıktığından, serbestlik derecesi sadece bu yönde hesaba katılmıştır. Çalışmada aktif denetim birinci kata aktif gergi sistemi (AGS) şeklinde uygulanmıştır. Eyleyici gecikmeli bozucu bir dış etki altındaki yapısal sistemin hareket denklemi,

$$M_s \ddot{y}(t) + C_s \dot{y}(t) + K_s y(t) = Fu(t-h) + Ew(t) \quad (29)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $y(t) = [y_1(t) y_2(t) y_3(t)]^T$  katların yatay yer

değişirmelerini gösteren durum vektörünü,  $u(t-h)$  zaman gecikmeli denetim kuvvetini,  $F \in \mathfrak{R}^{n \times m_u}$  denetleyicinin yerleştirildiği yeri  $w(t) \in L_2$  sisteme uygulanan bozucu girişi,  $E \in \mathfrak{R}^{m_w}$  bozucuların ağırlık matrisini ve  $M_s, C_s, K_s \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  matrisleri ise sırasıyla yapısal sistemin kat kütle, sönüm ve rijitlik matrislerini göstermektedir. Her bir katın kütle değerleri;  $m_1=56000$  kg,  $m_2=34000$  kg,  $m_3=23000$  kg, sönüm değerleri;  $c_1=29818$  Ns/m,  $c_2=17890$  Ns/m,  $c_3=11928$  Ns/m ve rijitlik değerleri;  $k_1=1602000$  N/m,  $k_2=960000$  N/m,  $k_3=640000$  N/m olarak tespit edilmiştir.  $x(t) = [y(t)^T \dot{y}(t)^T]^T$  ifadesi kullanılarak (29)'da tanımlanan yapısal sistemin hareket denklemleri aşağıdaki durum-uzay formuna getirilebilir.

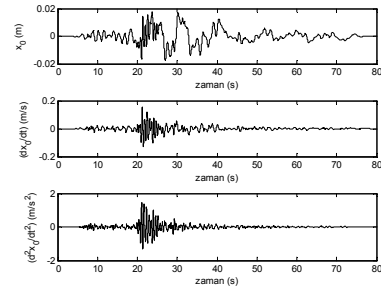
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_h u(t-h) + B_w w(t) \quad (30)$$

Burada,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_s^{-1}K_s & -M_s^{-1}C_s \end{bmatrix}, B_h = \begin{bmatrix} 0 \\ M_s^{-1}F \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ M_s^{-1}E \end{bmatrix}$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1/m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1/m_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, B_h = [0 \ 0 \ 0 \ -1/m_1 \ 1/m_2 \ 0]^T$$

şeklinde dir. Denetleyici tasarımları Matlab paket programı altında YALMIP arayüzü üzerinde kodlanarak Sedumi çözücüsü ile gerçekleştirilmiştir [9,10]. Yapıya bozucu giriş olarak Şekil 2'de gösterilen 1995 Kobe Depremi yer hareketi uygulanmıştır [11,12].



Şekil 2: 1995 Kobe Depremi yer hareketi.

Benzetim çalışmasında ilk olarak eyleyici gecikmesi olayının sistemin kapalı-çevrim kararlılığı üzerindeki olumsuz etkilerinin gösterilmesi amacıyla denetim kuvvetinin gecikmeye bağlı olarak hesaplanmadığı bilinen durum geri-beslemeli  $H_\infty$  denetleyici tasarımı gerçekleştirilmiştir. Kobe depremi etkisindeki yapısal sistemin bilinen durum geri-beslemeli  $H_\infty$  denetleyici ile oldukça iyi sönüm performansı göstermesine karşın, denetleyici sinyalinin çıkışına 0.0215 saniyelik bir eyleyici gecikmesi verilmesi

durumunda kapalı-çevrim sistem kararlılığını kaybettiği gözlemlenmiştir. Çizelge 1'de yapısal sistemin denetimli ve denetimsiz zaman cevapları eyleyici gecikmeli ve eyleyici gecikmesiz durum için verilmiştir. Bilinen durum geri-beslemeli  $H_\infty$  denetleyicinin sentez denklemlerine [6] referansından ulaşılabilmektedir. Tasarım sonucu durum geri-beslemeli  $H_\infty$  denetleyici için elde edilen denetleyici kazancı aşağıdaki gibidir.

$$K = 10^8 \times [1.0036 \ 0.2565 \ -0.3742 \ 0.0162 \\ -0.0136 \ -0.1207]$$

Çizelge 1: 1995 Katların (tepeden-tepeye) eyleyici gecikmeli ve gecikmesiz olması durumuna göre denetimli ve denetimsiz zaman cevapları.

Kobe Depremi	Denetimsiz	Denetimli $\bar{h} = 0$ (s)	Denetimli $\bar{h} = 0.0215$ (s)
$x_1$ (m)	0.0514	0.0182	$1.8989 \times 10^{65}$
$x_2$ (m)	0.1069	0.0251	$3.1213 \times 10^{65}$
$x_3$ (m)	0.1538	0.0322	$3.2897 \times 10^{65}$
$d^2x_1/dt^2$ ( $m/s^2$ )	1.5744	0.8550	$7.6040 \times 10^{68}$
$d^2x_2/dt^2$ ( $m/s^2$ )	1.0925	0.8447	$7.2440 \times 10^{68}$
$d^2x_3/dt^2$ ( $m/s^2$ )	1.6874	0.8248	$1.3359 \times 10^{67}$

Çizelge 1'den görüldüğü gibi, denetim kuvvetinin yapıya iletilmesi esnasında oluşacak çok küçük zaman gecikmeleri bile, denetim sisteminin kararlılığını kaybetmesine neden olmaktadır. Bunun nedeni eyleyici gecikmesinin sistemin dinamiğine dahil edilerek denetim kuvvetinin gecikmeye-bağlı olarak hesaplanmamasıdır. Bu sonuç, denetim kuvvetinin gecikmeye-bağlı olarak belirlendiği sistemin kararlılığı ve performansının garanti altında olduğu yeni bir denetleyici yapısının elde edilmesi gerekliliğini ortaya koymaktadır. Bu nedenle çalışmada yeni bir eyleyici doyumlu gecikmeye bağlı dayanıklı  $H_\infty$  denetleyici sentez metodu geliştirilmiştir. Denetleyici tasarımında, sistemdeki belirsizliklerin yapısını gösteren matrisleri,

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -M_s^{-1}K_s & -M_s^{-1}C_s \end{bmatrix}, \quad E_A = I, \quad F(t) = \bar{p}f_1(t)$$

şeklinde seçilmiştir. Burada  $\bar{p}$ , kapalı-çevrim sistemin kararlılık sınırlarında sistemdeki parametre belirsizliğinin ulaşabileceği en üst belirsizlik sınırını gösteren değerdir. Denetleyici tasarımlarında tüm durumlar geri beslenmiştir. En büyük iterasyon sayısı

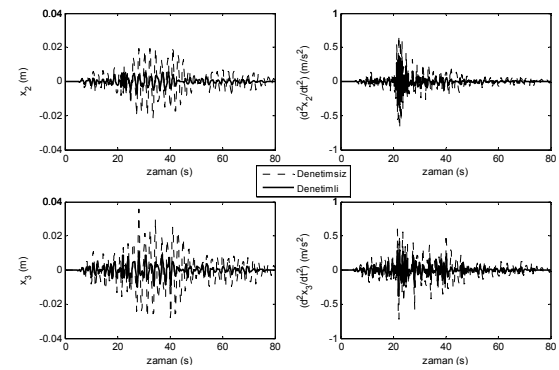
$k_{max} = 300$  olarak seçilmiştir.  $\pm 100000$  N'luk eyleyici doyumu limiti için enerjisi sınırlı bozucuların bastırılmasına yönelik olarak alt en iyi denetleyici kazancına

$$\min \gamma \\ \text{kosullar : (19), (25), (26)}$$

en iyileştirme probleminin çözümünden ulaşılmıştır. Önerilen konik tamamlayıcı algoritması ile gecikme zamanının erişilebilir en üst sınırı  $\bar{h}$ 'ın 0.12 saniye, en büyük parametre belirsizliği sınırının  $\bar{p}$  % 29, en düşük bozucu bastırma seviyesi  $\gamma$ 'nın 42.09 olduğu eşzamanlı olarak hesaplanmıştır. Kullanılan eyleyicinin sabit zaman gecikmeli ekipmanlardan oluşması nedeniyle  $\mu = 0$  olarak alınmıştır. Bu sonuçlara 219 iterasyon sonucunda ulaşılmış ve alt-en iyi denetleyici

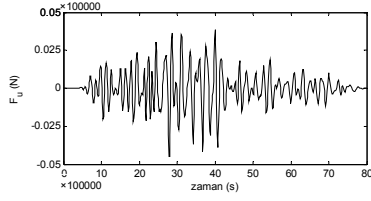
$$K = \bar{L}X^{-1} = [0.3718 \ 1.1882 \ 0.4969 \ -0.1628 \\ -0.6797 \ -0.7176]$$

şeklinde elde edilmiştir. Şekil 3'de yapısal sistemin katlarının yer değiştirme ve ivmelerinin denetimsiz ve denetimli zaman cevapları gösterilmektedir. Çalışmada geliştirilen denetleyicinin, hem yer değiştirme hem de ivme cevaplarında oldukça iyi sönüm performansı göstererek katların titreşim genliklerini başarılı bir şekilde azalttığı görülmektedir. Burada denetim kuvvetinin sınırlandırılması ile titreşim genliklerinin en aza indirilmesi arasında bir ödünleşme yaşanmıştır.



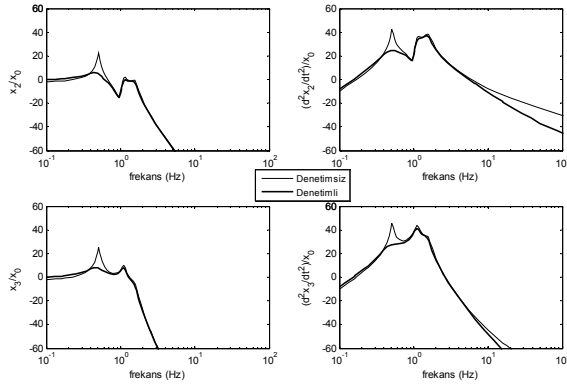
Şekil 3: 2. ve 3. katın yer değiştirme ve ivmelerinin denetimli ve denetimsiz zaman cevapları.

Şekil 4'de yapısal sisteme uygulanan eyleyici doyumlu denetim kuvveti gösterilmektedir. Burada, geliştirilen denetleyicinin, giriş doyumu sınırı olan  $\pm 100000$  N'luk denetim kuvveti genlik kısıtı içerisinde çalıştığı görülmektedir.



Şekil 4: 1995 Kobe depremi için denetim kuvvetindeki değişim.

Modellenen yapının frekans cevapları, denetimli ve denetimsiz olarak Şekil 5'de çizdirilmiştir. Yapısal sistem üç serbestlik derecesine sahip olduğundan; 0.4482, 0.9793 ve 1.3768 Hz. olmak üzere üç tane doğal frekansı vardır. Şekil 5'den de görüldüğü gibi önerilen dayanıklı gecikmeye bağlı denetleyici ile sismik zorlanma altındaki bir yapı için en yıkıcı mod olarak kabul edilen 1. mod etkin bir şekilde bastırılmıştır.



Şekil 5: 2. ve 3. katın yer değiştirme ve ivmelerinin denetimli ve denetimsiz frekans cevapları.

## 5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, doyumlu eyleyiciye sahip gecikmeye bağlı yeni bir dayanıklı  $H_\infty$  denetleyici elde edilerek, kolayca gerçekleştirilebilir bir sentez metodu geliştirilmiştir. Konik tamamlayıcı algoritması kullanılarak, kapalı-çevrim sistemin yeterli kararlılık şartlarında, erişilebilir en üst eyleyici gecikmesi zamanı ve parametre belirsizliği sınırı ile en düşük bozucu bastırma seviyesi istenilen en düşük eyleyici doyumu limitinde eş zamanlı olarak belirlenmiştir. Yapılan benzetim çalışmasıyla, tasarımı gerçekleştirilen denetleyicinin sönüm performansı ve uygulanabilirliği gösterilmiştir. Benzetim çalışmaları, önerilen denetleyicinin titreşim genliklerinin azaltılmasında etkin olarak kullanılabileceğini ve kapalı-çevrim sistemin küresel asimptotik kararlılığının garanti altında olduğunu göstermiştir. Önerilen denetleyicinin diğer

önemli avantajı ise ayar parametresi içermemesi ve istenilen eyleyici doyumu limitinde yüksek sönüm performansı göstermesidir.

**TEŞEKKÜR:** Bu çalışma 109M532 Nolu TÜBİTAK projesi ile desteklenmiştir. Katkılarından dolayı TÜBİTAK'a ve HEKİM HOLDİNG A.Ş.'ye teşekkür ederiz.

## 6. KAYNAKLAR

- [1] Du, H., Zhang, N. and Naghdy, F., "Actuator saturation control of uncertain structures with input time delay", Journal of Sound and Vibration 330, 4399-4412, 2011.
- [2] Gu, K., Kharitonov, V., Chen, J., "Stability of time delay systems", Birkhauser: Basel, Boston, 2003.
- [3] Hu, T. and Lin, Z., "Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design". Boston, MA: Birkhauser, 2001.
- [4] Petersen I. R., Hollot C. V., "A Riccati Equation Approach to the Stabilization of Uncertain Linear Systems", Automatica, 22(4), 397-411, 1986.
- [5] Yazıcı H., Guclu R., Kucukdemiral I.B., Parlakci M.N.A., "Robust Delay-Dependent  $H_\infty$  Control for Uncertain Structural Systems with Actuator Delay", Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control 134(3), 1-15, 2012.
- [6] Boyd, S., Ghaoui, L.E., Feron, E., Balakrishnan, V., "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory", Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- [7] El Ghaoui, L., Qustry, F., Ait Rami, M., "A Cone Linearization Algorithm for Static Output-Feedback and Related Problems, IEEE Transactions on Automatic Control, 42(8), 1171-1176, 1997.
- [8] Güçlü, R., "Yapısal Sistemlerin Farklı Bozucu Girişler Etkisi Altındaki Titreşimlerinin Analizi ve Aktif-Pasif Kontrolü", TÜBİTAK 1001, MAG Proje No: 109M523, 2010-2012.
- [9] Löfberg, J., "Yalmip: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB", Proceedings of the CACSD Conference, Taipei, Taiwan, 2004.
- [10] Strum, J.F., "Using SeDuMi 1.02 a Matlab for Optimization Over Symmetric Cones", Optimization Methods and Software, 11(2), 625-653, 1999.
- [11] Kasımzade, A.A., Structural Dynamics, Birsan Publication, Istanbul, Turkey, 2004.
- [12] Yagiz, N., "Sliding Mode Control of a Multi-Degree-of-Freedom Structural System with Active Tuned Mass Damper", Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences, 25, 651-657, 2001.